به نامِ خدا

امتحانِ میان‌ترمِ اولِ پدیده‌های بحرانی — دانش‌گاهِ الزهرا– اردیبهشتِ ۹۹

مسئله‌یِ ۱) الف– نشان دهید هر تابعِ هم‌گنِ دومتغیره

$$f(\lambda x, \lambda y) = g(\lambda) f(x, y)$$

را می‌توان به صورتِ زیر نوشت

$$f(x, y) = x^p A(\frac{y}{x}).$$

ب– نشان دهید هر تابعِ $x^p A(\frac{y}{x})$ یک تابعِ هم‌گن است.

ج– برایِ یک سیستمِ مغناطیسی در نزدیکیِ نقطه‌یِ بحرانی انرژیِ آزاد

$$\mathcal{F} \sim |t|^{2-\alpha} g\left(\frac{B}{|t|^{\Delta}}\right),$$

است. مغناطش و پذیرفتاریِ مغناطیسی در نزدیکیِ نقطه‌یِ بحرانی چه رفتاری دارند؟

حلِ مسئله‌یِ ۱) الف– با دوبار مقیاس کردن به نتیجه‌یِ زیر می‌رسیم

$$f(\lambda\mu x, \lambda\mu y) = g(\lambda) f(\mu x, \mu y) = g(\lambda) g(\mu) f(x, y), \qquad (۱)$$

که از طرفی همان

$$f(\lambda\mu x, \lambda\mu y) = g(\lambda\mu) f(x, y), \qquad (۲)$$

است. پس

$$g(\lambda\mu) = g(\lambda) g(\mu). \qquad (۳)$$

در درس نشان دادیم جوابِ این معادله یک تابعِ توانی است

$$g(\lambda) = \lambda^p. \qquad (۴)$$

پس

$$f(\lambda x, \lambda y) = g(\lambda) f(x, y) = \lambda^p f(x, y), \qquad (۵)$$

که با انتخابِ $\lambda = \frac{1}{x}$ می‌رسیم به

$$f(1, \frac{y}{x}) = x^{-p} f(x,y), \quad \Rightarrow \quad f(x,y) = x^p A(\frac{y}{x}), \tag{۶}$$

که $A(\frac{y}{x}) := f(1, \frac{y}{x})$ است.

ب_ اگر

$$f(x,y) = x^p A(\frac{y}{x}).$$

باشد،

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^p x^p A(\frac{y}{x}) = \lambda^p f(x,y).$$

ج_ با مقایسه با روابطی که در درس به دست آوردیم،

$$\frac{b}{a} = \Delta,$$
$$\frac{1}{a} = 2 - \alpha.$$

پس نماهایِ بحرانی

$$\beta = \frac{1-b}{a} = 2 - \alpha - \Delta,$$
$$\delta = \frac{1-b}{b} = \frac{2-\alpha}{\Delta} - 1,$$
$$\gamma = \frac{2b-1}{a} = 2\Delta - 2 + \alpha,$$

مسئله‌یِ ۲) مدلِ اسپینی‌یِ کلاسیکی روی شبکه‌ای یک‌بعدی با همیلتونی‌یِ

$$H = -J \sum_{\langle ij \rangle} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j - \sum_i \boldsymbol{B} \cdot \mathbf{S}_i$$

را در نظر بگیرید، که $\boldsymbol{B} = B\hat{\mathbf{z}}$ است. $\hat{\mathbf{z}}$ بردارِ یکه در راستایِ محورِ z است.

الف_ در هر جای‌گاه $\mathbf{S}_i$ را برداری با طولِ ثابت (مثلاً برایِ سادگی واحد) بگیرید، که در غیابِ میدانِ مغناطیسی در هر جهتی می‌تواند قرار گیرد. جایِ هر اسپین در جمله‌یِ

اول

$$\mathbf{S}_i = m\hat{\mathbf{z}} + (\mathbf{S}_i - m\hat{\mathbf{z}})$$

قرار دهید و جوابِ خود را تا مرتبه‌یِ اولِ $\mathbf{S}_i - m\hat{\mathbf{z}}$ نگه دارید. به جمله‌یِ دوم دست نزنید. همیلتونی را در تقریبِ میدانِ میانگین به دست آورید.

راه‌نمایی: در این تقریب همیلتونی شبیهِ مساله‌یِ پارامغناطیس می‌شود.

ب‌ــ تابعِ پارش و انرژی آزاد را در تقریبِ میدانِ میانگین به دست آورید.

ج‌ــ آیا در تقریبِ میدانِ میانگین این سیستم گذارِ فاز دارد؟

د‌ــ در تقریبِ میدانِ میانگین نماهایِ بحرانی β و δ را به دست آورید.

راه‌نمایی:

$$m(t, B=0) \sim t^{\beta}, \quad m(t=0, B) \sim B^{1/\delta} \quad t := \frac{T - T_c}{T_c}$$

حلِ مسئله‌یِ ۲) الف‌ــ با توجه به این‌که میدانِ مغناطیسی در راستایِ $\hat{\mathbf{z}}$ است، تنها یک راستایِ ارجح وجود دارد، که همان راستایِ $\hat{\mathbf{z}}$ است. بنا بر این از تقارنِ مسئله واضح است که مغناطشِ متوسط در راستایِ $\hat{\mathbf{z}}$ است. در این تقریب همیلتونی تبدیل می‌شود به

$$\begin{aligned} H &= -J \sum_{\langle ij \rangle} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j - \sum_i \boldsymbol{B} \cdot \mathbf{S}_i \\ &= -J \sum_{\langle ij \rangle} [m\hat{\mathbf{z}} + \delta\mathbf{S}_i] \cdot [m\hat{\mathbf{z}} + \delta\mathbf{S}_j] - \sum_i \boldsymbol{B} \cdot \mathbf{S}_i \\ &\approx H_{MF} = -J \sum_{\langle ij \rangle} \left(m^2 + m(\delta\mathbf{S}_i + \delta\mathbf{S}_j) \cdot \hat{\mathbf{z}} \right) - B \sum_i S_{i,z} \\ &\approx Jm^2 N - (B + 2Jm) \sum_i S_{i,z} \end{aligned} \tag{۷}$$

که شبیه مسئله‌یِ پارامغناطیس با میدانِ مغناطیسیِ موثرِ $B_{\text{eff}} := (B + 2Jm)$ است. با

استفاده از نتایجی که در درس به دست آوردیم

$$\begin{aligned} Z_{\mathrm{MF}} &= \mathrm{e}^{-\beta JNm^2}\left(\frac{4\pi\sinh(\beta B_{\mathrm{eff}})}{\beta B_{\mathrm{eff}}}\right)^N \\ &= \mathrm{e}^{-\beta JNm^2}\left(\frac{4\pi\sinh(\beta(B+2Jm))}{\beta(B+2Jm)}\right)^N, \end{aligned} \tag{۸}$$

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{MF}} &= -kT\ln Z_{\mathrm{MF}} \\ &= JNm^2 - NkT\ln[4\pi\sinh(\beta(B+2Jm))] + NkT\ln[\beta(B+2Jm)] \end{aligned} \tag{۹}$$

از این‌جا مغناطشِ متوسط در هر سایت

$$m = \frac{1}{N}\frac{\partial \ln Z_{MF}}{\partial \beta B} = \coth[\beta(B+2Jm)] - \frac{1}{\beta(B+2Jm)}. \tag{۱۰}$$

ج ــ در غیابِ میدانِ مغناطیسی

$$m = \coth[2\beta Jm)] - \frac{1}{2\beta Jm}. \tag{۱۱}$$

و با استفاده از بسطِ

$$\coth u = \frac{1}{u} + \frac{u}{3} - \frac{u^3}{45} + \cdots. \tag{۱۲}$$

می‌رسیم به

$$m = \frac{1}{3}\beta(B+2Jm) - \frac{\beta^3}{45}(B+2Jm)^3 + \cdots \tag{۱۳}$$

که در غیابِ میدانِ مغناطیسی تبدیل می‌شود به

$$m = \coth[2\beta Jm)] - \frac{1}{2\beta Jm}. \tag{۱۴}$$

$$\begin{aligned} m &= \frac{2\beta Jm}{3} - \frac{(2\beta Jm)^3}{45} + \cdots, \\ m^3 &= m(\frac{2\beta J}{3} - 1) \\ m &\sim (1 - \frac{T}{T_c})^{1/2}, \end{aligned} \tag{۱۵}$$

که $T_c := \frac{2J}{3k}$ و نمایِ بحرانی‌یِ $\beta = \frac{1}{2}$ است. در $T = T_c$ معادله‌یِ (۱۳) تبدیل می‌شود به

$$\begin{aligned} m &= \frac{\beta_c B}{3} + m - \frac{1}{45}(\beta_c B + 3m)^3 + \cdots \\ \frac{\beta_c B}{3} &\approx \frac{1}{45}(\beta_c^3 B^3 + 27m^3 + 27\beta_c B m^2 + 9\beta_c^2 B^2 m) \end{aligned} \tag{۱۶}$$

در دمایِ بحرانی $\beta_c B \sim m^\delta$ است. در این صورت

$$\frac{1}{3}m^\delta \sim \frac{1}{45}m^{3\delta} + \frac{3}{5}m^3 + \frac{3}{5}m^{2+\delta} + \frac{1}{5}m^{2\delta+1}, \tag{۱۷}$$

برایِ این‌که این رابطه برقرار باشد، جمله‌هایِ هم‌توان باید هم‌دیگر را حذف کنند. پس نمایِ بحرانی‌یِ $\delta = 3$ است.